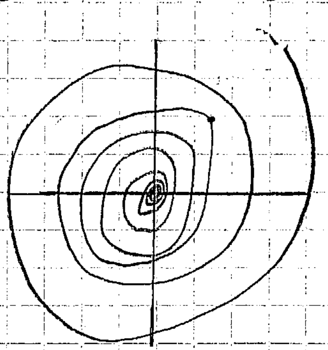
תרגיל 4 יסודות תורת הפונקציות המרוכבות

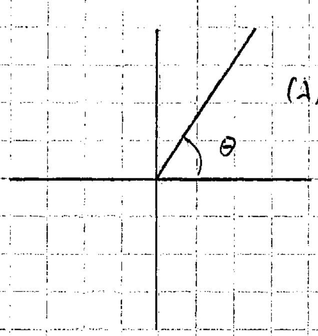
(1) גרף הפונקציה $f(z)=e^z$ כאשר:

(א) $Re(z)=r$ ו- $y=Im(z)\in\mathbb{R}$ אזי $e^z=e^r\cdot e^{iy}$

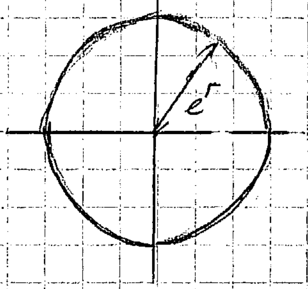
(ב) $Im(z)=\theta$ ו $x=Re(z)\in\mathbb{R}$ אזי $e^z=e^x\cdot e^{i\theta}$

(ג) $z=x+iy$, $y=kx+b$ $\Leftarrow$ $e^z=e^x\cdot e^{ikx}\cdot e^{ib}$





(ב)



(א)

(2) $f(z)=\frac{1}{z}$ נמצא את התמונה של:

(א) $z\in S_a \Leftrightarrow |z|^2=a\cdot Re(z) \overset{z=x+iy}{\Longleftrightarrow} x^2+y^2=ax$

$\Leftrightarrow x^2-ax+\frac{1}{4}a^2+y^2=\frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

כלומר זהו מעגל שמרכזו ב- $\frac{1}{2}a$ ורדיוסו $\frac{1}{2}a$.

$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x}{ax}-i\frac{y}{ax}=\frac{1}{a}-i\cdot\frac{y}{x}$

לכן עבור $a\neq 0$ <u>זהו ישר המקביל לציר ה- x</u>

<u>ועובר דרך הנקודה $\frac{1}{a}$</u>. עבור $a=0$ - לא מוגדר.

(ב) $z\in L_b \Leftrightarrow Im(z)=Re(z)+b \overset{z=x+iy}{\Longleftrightarrow} z=x+i(x+b)$

זהו ישר עם שיפוע 1 העובר דרך הנקודה ib.

נסמן $w=f(z)=\frac{1}{z}$ אזי $z=\frac{1}{w}$. נסמן $w=\alpha+i\beta$

$z\in L_b \Leftrightarrow \frac{1}{w}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\in L_b \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+b$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+b=0 \Leftrightarrow b(\alpha^2+\beta^2)+\alpha+\beta=0$

• <u>$b\neq 0$</u>: $0=\alpha^2+\frac{1}{b}\alpha+\beta^2+\frac{1}{b}\beta=\left(\alpha+\frac{1}{2b}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{2b}\right)^2-\frac{1}{2b^2}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha+\frac{1}{2b}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{2\beta}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}|b|}\right)^2$ $(b\in\mathbb{R})$

<u>לכן w נמצא על מעגל ברדיוס $\frac{1}{\sqrt{2}|b|}$ סביב $\frac{1+i}{2b}$</u>

• <u>$b=0$</u>: $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}=0 \Rightarrow \alpha=-\beta$ לכן w נמצא על ישר

<u>עם שיפוע -1 העובר דרך הנקודה 0.</u>

(3) (א) $\gamma_1\sim\gamma_2$, $\gamma_3\sim\gamma_4$ לכן קיימות $\varphi_1,\varphi_2:[0,1]\to[0,1]$

מונוטוניות עולות ורציפות כך ש $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$

וכן $\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=1$ כך ש $\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi_1$, $\gamma_3=\gamma_4\circ\varphi_2$.

אזי:

$$\gamma_1\gamma_3(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_3(2t-1) & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}=\begin{cases}\gamma_2\circ\varphi_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_4\circ\varphi_2(2t-1) & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

לכן, אם נגדיר

$$\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\varphi_2(2t-1)+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

אזי קל לראות ש φ מונוטונית עולה ורציפה וכן:

$$\gamma_2\gamma_4\circ\varphi(t)=\gamma_2\gamma_4(\varphi(t))=\begin{cases}\gamma_2(2\cdot\frac{1}{2}\varphi_1(2t)) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_4(2\cdot\frac{1}{2}\varphi_2(2t-1)+1-1) & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\gamma_2\circ\varphi_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \gamma_4\circ\varphi_2(2t-1) & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}=\gamma_1\gamma_3(t)$$

לכן $\gamma_1\gamma_3\sim\gamma_2\gamma_4$

(ב)

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f\,dz=\int_0^1 f(\gamma_1\gamma_2(t))\cdot(\gamma_1\gamma_2)'(t)\,dt\ \overset{\text{הגדרה}}{\underset{\text{אינט'}}{=}}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma_1(2t))\cdot 2\cdot\gamma_1'(2t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t-1))\cdot 2\cdot\gamma_2'(2t-1)\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=2t & v=2t-1\\ du=2dt & dv=2dt\end{matrix}\right\}=\int_0^1 f(\gamma_1(u))\gamma_1'(u)\,du+\int_0^1 f(\gamma_2(u))\gamma_2'(u)\,du=$$

$$=\int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{\gamma_2} f\,dz$$

(ג)

$$\int_\gamma(\lambda f+\mu g)\,dz=\int_0^1(\lambda f+\mu g)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^1(\lambda f(\gamma(t))+\mu g(\gamma(t)))\cdot\gamma'(t)\,dt\ \overset{\text{לינ'}}{=}\ \lambda\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt+$$

$$+\mu\int_0^1 g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\lambda\int_\gamma f\,dz+\mu\int_\gamma g\,dz$$

במעברים השתמשנו בתכונות הרגילות עבור אינטגרלים
מסוימים.

(4 ניקח את המסלול $\gamma(t) = 2e^{it}$ $\quad \gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma \underline{z+\bar{z}\, dz} = 2\int_\gamma \mathrm{Re}\, z\, dz = 2\int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2ie^{it}\, dt =$$

$$= 8i\int_0^{2\pi} e^{it}\cos t\, dt = 8i\int_0^{2\pi} e^{it}\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\, dt =$$

$$= 4i\int_0^{2\pi}(e^{2it}+1)\,dt = 4i\cdot\left(\frac{1}{2i}e^{2it}+t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \cancel{2e^{4i\pi}} - \cancel{2e^0} + 8i\pi - 0 = \underline{8i\pi}$$

$$\int_\gamma \underline{z^2-2z+3\, dz} = \int_0^{2\pi}(4e^{2it}-4e^{it}+3)\cdot 2ie^{it}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(8ie^{3it}-8ie^{2it}+6ie^{it})\,dt = \frac{8}{3}e^{3it}-4e^{2it}+6e^{it}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{8}{3}-4+6-\frac{8}{3}+4-6 = \underline{0}$$

$$\int_\gamma \underline{z^{-4}dz} = \int_0^{2\pi} 2^{-4}e^{-4it}\cdot 2ie^{it}\, dt = \frac{i}{8}\int_0^{2\pi} e^{-3it}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{24}e^{-3it}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{24}+\frac{1}{24} = \underline{0}$$

$$\int_\gamma \underline{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} 2\cos t\cdot 2\sin t\cdot 2ie^{it}\, dt =$$

$$= 8i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot e^{it}\, dt =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(e^{3it}+\cancel{e^{it}}-\cancel{e^{it}}-e^{-it})\,dt = \frac{2}{3i}e^{3it}-\frac{2}{-i}e^{-it}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2}{3i}+\frac{2}{i}-\frac{2}{3i}-\frac{2}{i} = \underline{0}$$

(5 (א)

$$\int_0^{2\pi}\underline{\cos^{2n}t\, dt} = \int_0^{2\pi} 2^{-2n}(e^{it}+e^{-it})^{2n}\, dt =$$

$$= 2^{-2n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i(2n-k)t}e^{-ikt}\, dt = 2^{-2n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i(2n-2k)t}\, dt =$$

$$= 2^{-2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\int_0^{2\pi} e^{2i(n-k)t}\, dt \;\circleddash$$

נזכור כי

$$\int_0^{2\pi} e^{imt}\, dt \overset{m\neq 0}{=} \frac{1}{im}e^{imt}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\circleddash\; 2^{-2n}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\int_0^{2\pi} dt = \underline{2^{1-2n}\cdot\pi\cdot\binom{2n}{n}}$$

(ב)

$$\int_0^{2\pi}\underline{\frac{dt}{2+\cos t}} = \int_0^{2\pi}\frac{2\,dt}{4+e^{it}+e^{-it}} = \int_0^{2\pi}\frac{2e^{it}\,dt}{e^{2it}+4e^{it}+1} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{2e^{it}\,dt}{(e^{it}+2)^2-3} = \left\{\begin{matrix}\gamma(t) = e^{it}+2\\ \gamma'(t) = ie^{it}\end{matrix}\right\} = \frac{2}{i}\int_\gamma\frac{dz}{z^2-3} = \frac{2}{i}\int_\gamma\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-\sqrt{3}}-\frac{1}{z+\sqrt{3}}\right)dz =$$

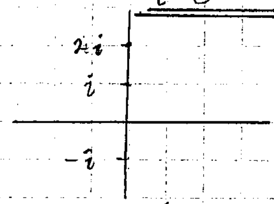
$$= \frac{1}{i\sqrt{3}}\int_\gamma\frac{dz}{z-\sqrt{3}} - \frac{1}{i\sqrt{3}}\int_\gamma\frac{dz}{z+\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\cdot 2\pi i\cdot\Big(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,\sqrt{3})}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,-\sqrt{3})}}\Big) = \underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

16) נגדיר $\gamma_r(t) = 2i + re^{it}$ $\quad \gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\gamma_r} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) dz = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \left(n(\gamma_r, i) - n(\gamma_r, -i)\right)$$

$$= \pi \cdot \begin{cases} 0-0 & 0 \le r < 1 \\ 1-0 & 1 < r < 3 \\ 1-1 & 3 < r \end{cases} = \begin{cases} \pi & 1 < r < 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

שכן :



אם $r<1$ אז $i, -i$ לא מוקפות ע"י γ_r כלל ולכן האינדקסים הם 0. אם $1<r<3$ רק i מוקף ע"י המסילה פעם אחת ואילו $-i$ לא מוקף כלל.

כאשר $r>3$ שני האינדקסים הם 1.

7) (א)

$$\int_{\gamma_1} |z^2|\, dz = \int_{\gamma_1} z \cdot \bar{z}\, dz = \int_0^1 \underbrace{(t+it^2)}_{z}\underbrace{(t-it^2)}_{\bar{z}} \cdot \underbrace{(1+2it)}_{\gamma'}\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t^2+t^4)(1+2it)\, dt = \int_0^1 t^2+t^4+2i \cdot (t^3+t^5)\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + 2i\left(\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15} + 2i \cdot \left(\frac{5}{12}\right) = \frac{8}{15} + \frac{5}{6}i$$

(ב)

$$\gamma_2(t) = \cos 2t + i \sin 2t + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}i + e^{2it}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot n(\gamma_2, 0) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i$$